# Funkce, definované implicitně – 2. část řešených příkladů

(4) (i) Nechť $F(x,y,z) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$ je otevřená množina

$F(x_0,y_0,z_0) = 0$, $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{o}$

Pak rovnice tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ (tečná rovina v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ existuje) je

$$(1) \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

$$\left(\text{tj: } \quad \nabla F(x_0,y_0,z_0) \circ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0\right)$$

---

Odůvodnění: BÚNO $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pak (dle věty o implicitní fci) je rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)$ def. implicitně funkce $z = f(x,y) \in C^{(1)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$, tj. $f$ je diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0)$ a uvažovaná plocha je v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)$ grafem funkce $f$. Rovnice tečné roviny ke grafu $f$ v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ ($z_0 = f(x_0,y_0)$) je

$$(2) \ldots \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Dle věty o implicitní funkci je

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

Pak, po dosazení z (3) do (2) dostaneme rovnici

$$z = z_0 + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\right)\cdot(x-x_0) + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\right)(y-y_0)$$

a po úpravě již snadno dostaneme rovnici (1).

(ii) Příklad: $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz-6$ , $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$

$$F \in C^\infty(R^3)$$
$$F(1,2,-1) = 1+8-1-2-6=0$$
$$\nabla F(1,2,-1) = (3x^2+yz, 3y^2+xz, 3z^2+xy)\Big|_{(1,2,-1)} =$$
$$= (1, 11, 5)$$

tedy, rovnice tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě $(1,2,-1)$ je

$$(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0 \quad , \text{t.}$$
$$\underline{x+11y+5z-18=0}$$

## Soustavy funkcí, definovaných implicitně.

① Je dána soustava

$$(1) \qquad \begin{aligned} x^2+y^2 &= z \\ x+y+z &= 2 \end{aligned}$$

("rotační paraboloid")
("rovina")

a bod $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$;
označíme-li $F_1(x,y,z) = x^2+y^2-z$, $F_2(x,y,z) = x+y+z-2$, pak

1) $F_1, F_2 \in C^\infty(R^3)$
2) $F_1(-1,1,2)=0$ i $F_2(-1,1,2)=0$
3) matice $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(-1,1,2), & \frac{\partial F_1}{\partial z}(-1,1,2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(-1,1,2), & \frac{\partial F_2}{\partial z}(-1,1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

je regulární.
(tj. determinant $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(-1,1,2), & \frac{\partial F_1}{\partial z}(-1,1,2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(-1,1,2), & \frac{\partial F_2}{\partial z}(-1,1,2) \end{vmatrix} \neq 0$)

Pak, dle věty o implicitních funkcích, jsou soustavou (1) definovány implicitně v okolí bodu $(-1,1,2)$ funkce $y=f(x)$ a $z=g(x)$, tj. funkce $f$ a $g$ splňují v okolí bodu $x=-1$ soustavu

$$(2) \qquad \begin{aligned} x^2 + f^2(x) - g(x) &= 0 \\ x + f(x) + g(x) &= 2 \end{aligned} \qquad \text{a} \quad f(-1)=1,\ g(-1)=2$$

Derivováním (2) ($f,g \in C^1(\mathcal{U}(-1))$) dostáváme soustavu pro $f'(x), g'(x)$:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 2x + 2f(x)\cdot f'(x) - g'(x) &= 0 \\ 1 + f'(x) + g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Matice soustavy (3) $\begin{pmatrix} 2f(x) & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulární v jistém okolí $x_0=-1$

a pro $x_0=-1$ dostáváme $f'(-1)=\frac{1}{3}$, $g'(-1)=-\frac{4}{3}$;

Obecněji, pro taková $x \in U(-1)$, kde $2f(x)+1 = \begin{vmatrix} 2f(x), & -1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

dostaneme $$f'(x) = \frac{-2x-1}{2f(x)+1} \quad \text{a} \quad g'(x) = \frac{2x-2f(x)}{2f(x)+1}.$$

„Geometricky":

Rovnice $x^2+y^2=z$ je rovnice rotačního paraboloidu a

$x+y+z=2$ je rovnice roviny;

bod $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$ je bod jejich průniku, což si jistě umíte představit" – průnik těchto dvou ploch je křivka a zobrazení $(x, f(x), g(x))$, $x \in U(-1)$ je její „parametrizace" v okolí bodu $x_0=-1$.

Označme-li zobrazení $\vec{r}(x) = (x, f(x), g(x))$, $x \in U(-1)$,

pak $\vec{r}\,'(x) = (1, f'(x), g'(x))$ je vektor tečný ke křivce v bodě $\vec{r}(x)$, tj.

tečný vektor ke křivce v bodě $(-1,1,2)$ je pak

$$\vec{t} = \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Pak lze vyjádřit parametricky tečnu k této křivce v bodě $(-1,1,2)$:

$$(x,y,z) = (-1,1,2) + t\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right),\ t \in R$$

(nebo také $(x,y,z) = (-1,1,2) + t(3,1,-4),\ t \in R$).

(2) Je dána soustava rovnic

$$(1) \quad \cdots \quad \begin{aligned} x + y - 2u^2 + v^2 &= 0 \\ x - y - uv &= 0 \end{aligned}$$

a bod $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$

Označíme-li

$$G_1(x,y,u,v) = x + y - 2u^2 + v^2$$
$$G_2(x,y,u,v) = x - y - uv \quad ,$$

pak platí:

1) $G_i(1,0,1,1) = 0$, $i = 1,2$;

2) $G_i \in C^\infty(R^4)$, $i = 1,2$;

3) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u}(1,0,1,1), & \frac{\partial G_1}{\partial v}(1,0,1,1) \\ \frac{\partial G_2}{\partial u}(1,0,1,1), & \frac{\partial G_2}{\partial v}(1,0,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Tedy, dle věty o implicitní funkci (obecnější „tvar" pro vektorová zobrazení) jsou soustavou (1) implicitně definovány v okolí bodu $(1,0,1,1)$ funkce $u = g_1(x,y)$, $v = g_2(x,y)$, $g_1, g_2 \in C^1(\mathcal{U}(1,0))$ $(\in C^\infty(\mathcal{U}(1,0)))$. Zobrazení $\vec{g} = (g_1, g_2)$ má tedy v bodě $(1,0)$ totální diferenciál

$$d\vec{g}(1,0)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0), & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0), & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

<u>Výpočet parciálních derivací funkcí $g_1, g_2$:</u>

Funkce $g_1, g_2$ splňují soustavu rovnic

$$(2) \quad \begin{aligned} x + y - 2g_1^2(x,y) + g_2^2(x,y) &= 0 \\ x - y - g_1(x,y) \cdot g_2(x,y) &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

a $\quad g_1(1,0) = 1, \quad g_2(1,0) = 1$

Odtud, derivováním soustavy (2) dostaneme soustavu pro výpočet parciálních derivací funkcí $g_1, g_2$.

$\frac{\partial}{\partial x}$:

$$1 - 4g_1(x,y)\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x} + 2g_2(x,y)\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0$$
$$1 - \frac{\partial g_1}{\partial x}g_2(x,y) - g_1(x,y)\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0$$

a v bodě $(x_0,y_0)=(1,0)$: ($g_1(1,0)=g_2(1,0)=1$)

$$4\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0) - 2\frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) = 1$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) = 1$$

tedy, $\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial}{\partial y}$:

$$1 - 4g_1(x,y)\frac{\partial g_1}{\partial y} + 2g_2(x,y)\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$
$$-1 - \frac{\partial g_1}{\partial x}\cdot g_2(x,y) - g_1(x,y)\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

a v bodě $(x_0,y_0)=(1,0)$:

$$4\frac{\partial g_1}{\partial y} - 2\frac{\partial g_2}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = -1$$

odtud $\frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{6}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0) = -\frac{5}{6}$

a

$$d\vec{g}(1,0)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$